Cuerpo rígido

Dinámica

Centro de masa

- Definimos el centro de masa para un sistema de partículas puntuales

$$\bar{r}_{CM} = \frac{\sum M_i \cdot \bar{r}_i}{M_{Tot}}$$

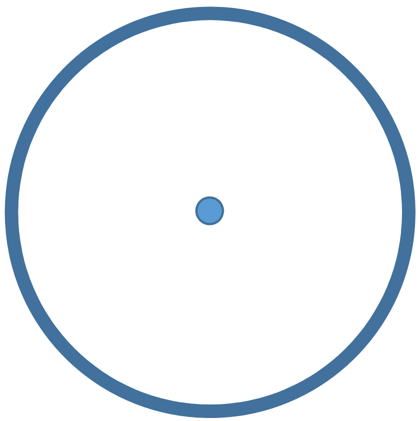
- ¿Qué ocurre si el sistema es un continuo?

$$\bar{r}_{CM} = \frac{\int \bar{r} \cdot dm}{M_{Tot}} = \frac{\int \bar{r} \cdot \delta \cdot dV}{M_{Tot}}$$

- Si el cuerpo es homogéneo, el centro de masa coincide con el centro geométrico.

Centro de masa

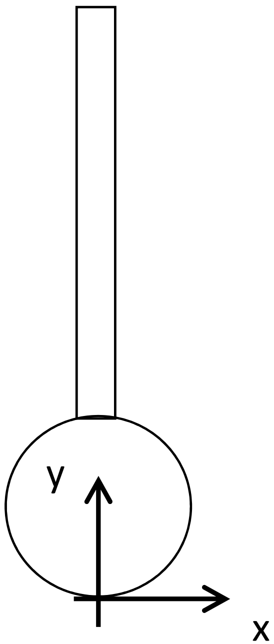
- ¿Puede el centro de masa estar en un punto que no pertenezca al CR? Sí.
- Ejemplo: Un anillo



Centro de masa

- ¿Y si son 2 cuerpos homogéneos unidos rígidamente?

Una barra de masa 2m y longitud L=4d y un disco de masa m y radio R=d



$$\bar{r}_{CM} = \frac{M_b \cdot \bar{r}_{CMb} + M_d \cdot \bar{r}_{CMd}}{M_{Tot}}$$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{2m \cdot (2R + \frac{L}{2})\breve{j} + m \cdot R\breve{j}}{3m}$$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{2m \cdot 4d\breve{j} + m \cdot d\breve{j}}{3m} = 3\mathrm{d}\breve{j}$$

Centro de masa

- ¿Por qué nos interesa el centro de masa? Por el teorema de conservación de la cantidad de movimiento lineal: describe el comportamiento del CM

$$\sum \bar{F} = M \cdot \bar{a}_{CM}$$

Momento de inercia

- Es la inercia de rotación de un cuerpo, depende de la distribución de la masa respecto de un eje de rotación. No es propiedad intrínseca del cuerpo (como sí lo es la masa).
- Consideramos que los cuerpos giran en un eje de simetría (que pase o sea paralelo al CM) y que el objeto se mueve en el plano. Entonces para nosotros es un escalar.
- El momento de inercia para un conjunto de partículas puntuales respecto de O es:

$$I_O = \sum M_i \cdot r_{io}^2$$

- Y para un continuo

$$I_O = \int r^2 \cdot dm$$

Momento de inercia

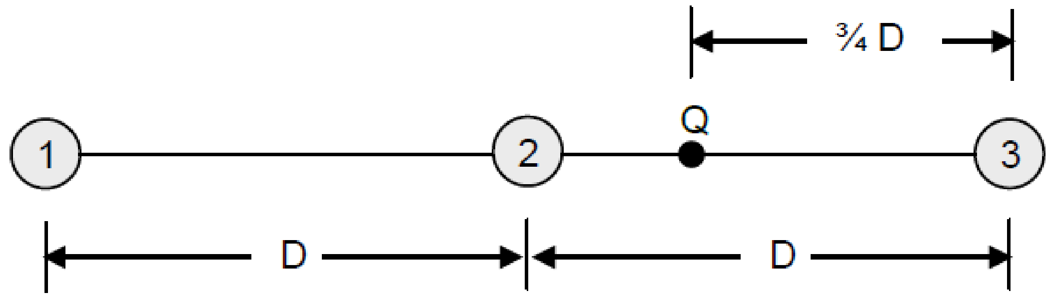
- Momento de inercia de cuerpos homogéneos respecto del CM
  - Anillo o cilindro hueco $\rightarrow$ $I_{CM} = MR^2$
  - Disco o cilindro macizo $\rightarrow$ $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$
  - Esfera hueca $\rightarrow$ $I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$
  - Esfera maciza $\rightarrow$ $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$
  - Barra $\rightarrow$ $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$

Momento de inercia

- Cálculo del momento de inercia para un conjunto de partículas unidas rígidamente

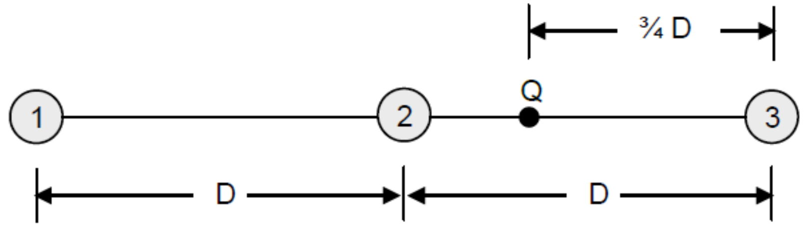
18. La figura muestra una barra rígida de masa despreciable que tiene tres masas puntuales iguales (M) unidas a ella. La barra tiene libertad de girar alrededor de un eje sin fricción perpendicular a ella que pasa por el punto "Q" y se suelta desde el reposo en la posición horizontal (t=0 s). Suponiendo que M y D son datos,

    a) Calcular el momento de inercia del sistema (barra + masas) alrededor del pivote.



Momento de inercia

- Cálculo del momento de inercia para un conjunto de partículas unidas rígidamente



$$I_Q = \sum M_i \cdot r_{iQ}^2$$

$$I_Q = M_1 \cdot r_{1Q}^2 + M_2 \cdot r_{2Q}^2 + M_3 \cdot r_{3Q}^2$$

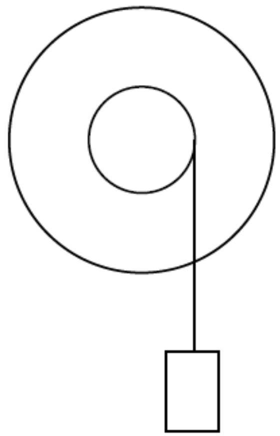
$$I_Q = m \cdot \left(\frac{5}{4}D\right)^2 + m \cdot \left(\frac{1}{4}D\right)^2 + m \cdot \left(\frac{3}{4}D\right)^2 = \frac{35}{16}mD^2$$

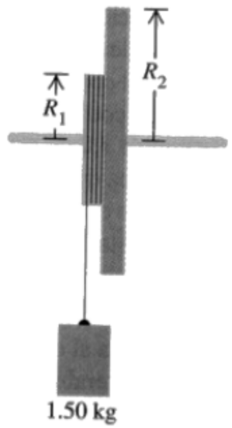
Momento de inercia

- ¿Y si son dos cuerpos homogéneos unidos rígidamente? Caso 1

14. Dos discos metálicos de radios R_1= 3,00 cm y R_2= 6,00 cm y masas M_1= 0,80 kg y M_2= 1,60 kg, se sueldan juntos y se montan en un eje sin rozamiento que pasa por su centro común tal como se muestra en la figura.

    a- ¿Qué momento de inercia total tienen los discos respecto del eje que pasa por sus centros tal como muestra la figura?





Momento de inercia

- Se suma el momento de inercia de cada uno de ellos

$$I_{CM}^{Polea} = I_{CM}^{Disco1} + I_{CM}^{Disco2}$$

$$I_{CM}^{Polea} = \frac{M_1 R_1^2}{2} + \frac{M_2 R_2^2}{2}$$

$$I_{CM}^{Polea} = \frac{0{,}8kg \cdot (0{,}03m)^2}{2} + \frac{1{,}6kg \cdot (0{,}06m)^2}{2}$$

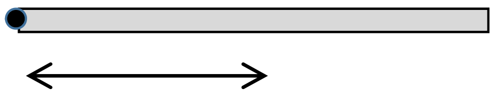
$$I_{CM}^{Polea} = 3{,}24 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Momento de inercia: Teorema de Steiner

- Si queremos determinar el momento de inercia de un punto O, a partir de conocer el del centro de masa.

$$I_O = I_{CM} + Md_{O/CM}^2$$

- Ejemplo: Calcular el momento de inercia de una barra respecto de uno de sus extremos.

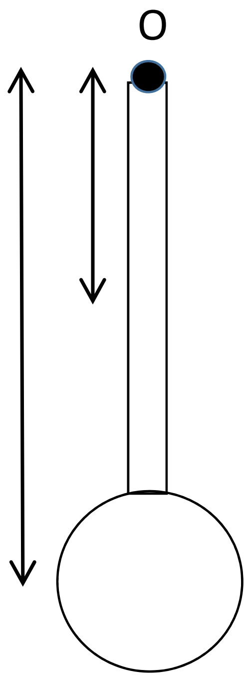


$d_{O/CM}$=L/2

$$I_O = \frac{M \cdot L^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{M \cdot L^2}{3}$$

Momento de inercia

- ¿Y si son dos cuerpos homogéneos unidos rígidamente? Caso 2: Determinar el momento de inercia del péndulo respecto del punto O
  - Se suman, pero respecto del mismo punto (O)



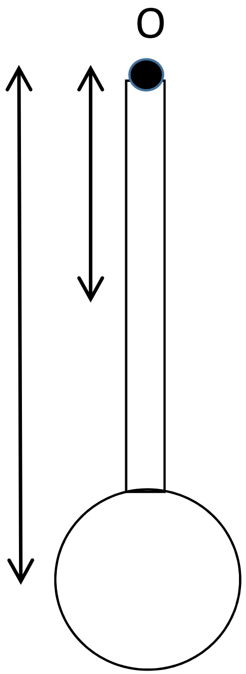
$$I_O^{Péndulo} = I_O^{Disco} + I_O^{Barra}$$

$$I_O^{Disco} = I_{CM}^{Disco} + M_D d_{CMD/O}^2$$

$$I_O^{Barra} = I_{CM}^{Barra} + M_B d_{CMB/O}^2$$

Momento de inercia

- Datos: Disco de masa m, radio R. Barra de masa 2m y L=4R



$$I_O^{Barra} = I_{CM}^{Barra} + M_B d_{CMB/O}^2 = \frac{2m(L)^2}{12} + 2m(\frac{L}{2})^2$$

$$I_O^{Barra} = \frac{2m(L)^2}{3} = \frac{2m(4R)^2}{3} = \frac{32}{3} mR^2$$

$$I_O^{Disco} = I_{CM}^{Disco} + M_D d_{CMD/O}^2 = \frac{mR^2}{2} + m(5R)^2 = \frac{51}{2} mR^2$$

$$I_O^{Péndulo} = I_O^{Disco} + I_O^{Barra} = \frac{217}{6} mR^2$$

Momento de inercia

- ¿Por qué nos interesa el momento de inercia? Por el teorema de conservación de la cantidad de movimiento angular.

$$\sum \overline{\mathrm{T}}_o^F = \frac{d\bar{L}_O}{dt}$$

- Si el punto O es el CM o el CIR, vale la siguiente expresión que permite describir la rotación de las partículas

$$\bar{L}_O = I_O\overline{\Omega} \qquad \rightarrow \qquad \sum \overline{\mathrm{T}}_o^F = I_O\bar{\gamma}$$